

חדוא 2 הנדסת מכונות



תוכן העניינים

1.	אינטגרלים לא אמיתיים.	1
12.	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב.	12
39.	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה.	39
47.	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים.	47
54.	מבוא לטופולוגיה.	54
57.	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות.	57
68.	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.	68
72.	נגזרת מכוונת וגרדיאנט.	72
77.	פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים.	77
91.	נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם.	91
94.	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים.	94
96.	קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים.	96
98.	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')	98
101.	קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים.	101
103.	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה.	103
104.	אינטגרלים כפולים.	104
110.	שימושי האינטגרל הכפול.	110
113.	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות).	113
118.	החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן).	118
120.	אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל).	120
129.	סדרות.	129
162.	טורים עם איברים קבועים.	162
176.	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות.	176

תוכן העניינים

185	24. טורי טיילור - מקלורן.....
200	25. נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה.....

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 1 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון..... 1
2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני..... 3
3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי..... 4
4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים..... 5
5. מבחני השוואה..... 6
6. התכנסות בהחלט..... 8
7. מבחן דיריכלה..... 9
8. התכנסות בתנאי..... 10

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5 :

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2e}$$

$$(4) \quad \text{מתבדר : } \infty$$

$$(5) \quad \frac{5}{4e^2}$$

$$(6) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(7) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

(1) מתבדר : $-\infty$

(2) מתבדר : $-\infty$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

תשובה

(1) מתבדר: ∞ .

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

שאלות

(1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר ה- x , עבור $x \leq 1$.

(2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq k$, שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- x , בתחום $x \geq k$. מצאו את הקבוע k .

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

מבחני השוואה

שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

תשובות סופיות

- | | |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתבדר. |
| (3) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (5) מתבדר. | (6) מתבדר. |
| (7) מתכנס. | (8) מתכנס. |
| (9) מתבדר. | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

התכנסות בהחלט

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{הוכיחו: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

תשובות סופיות

(1) מתכנס.

(2) מתכנס.

(3) מתכנס.

(4) שאלת הוכחה.

מבחן דיריכלה

שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx$$

$$(2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$$

$$(3) \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

התכנסות בתנאי

שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב.} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \quad \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בהחלט.
 ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$,
 מתבדר עבור $p \geq 2$.
 ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$,
 מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 2 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

12	1. קווים ותחומים במישור
16	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית
22	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)
27	4. משטחים במרחב
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית
29	6. גופים במרחב
32	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות
36	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x - 3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10 נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.
- רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
- רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
- מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
- מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2$ $t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t$ $0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t$ $\pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2, 2)$ לנקודה $B(-2, -2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2, -3)$ לנקודה $B(-1, 0)$.
- כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

$$(8) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq 2\pi$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \text{א. } \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{ב. } \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז : } (0, 0) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז : } (8, 4) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \text{א. } \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

.ד

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}.$$

$$\text{פרמטרית: ימנית } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}, \text{ שמאלית: } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}.$$

$$\text{פרמטרית: ענף ימני } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \text{ וענף שמאלי } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases}$$

$$\text{ג. } C: \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ד. 1}$$

$$(8) \quad 8$$

$$(9) \quad 6\pi\sqrt{29}$$

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

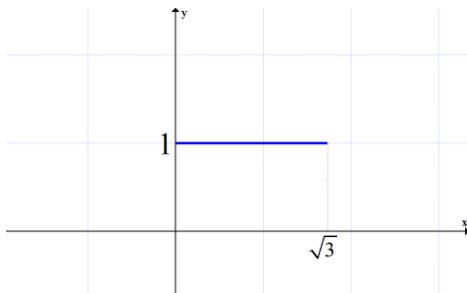
ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

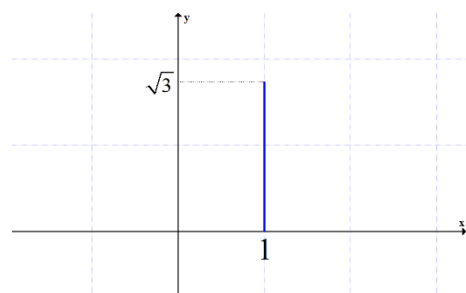
ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

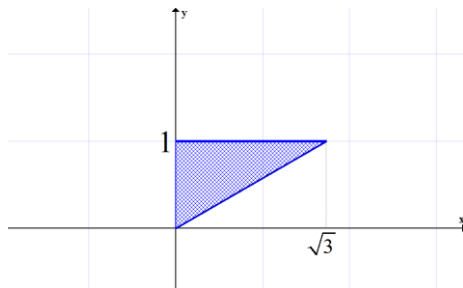
ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) | \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

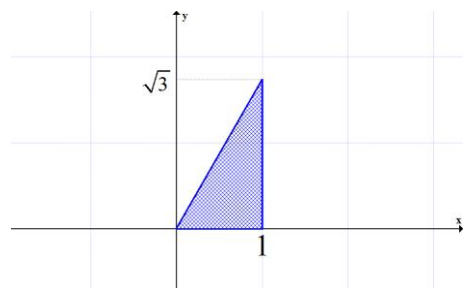
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) | \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \quad \text{א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \quad \text{א.} \quad r \cos \theta = 10 \quad \text{ב.} \quad r \sin \theta = 4 \quad \text{ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{א.} \quad y = x \quad \text{ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \text{ג.}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \quad \text{ד.}$$

$$(6) \quad r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(7) \quad \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ה.} \quad \begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3}\right) + \pi \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$(8) \quad r = 4 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \quad \text{א.} \quad r = 6 \sin \theta, \quad 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ג.} \quad r = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \quad \text{ד.}$$

$$(9) \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$(10) \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$(11) \quad 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \quad \text{א.} \quad 1 \leq r \leq 2 \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi$$

$$(12) \quad \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \text{א.} \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4}\right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$(14) \text{ א. } 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{ב. } 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$ (7)

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ (9)

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
- החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
- א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
- נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z = -x, z = x$.
ג. $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$ $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \left\{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

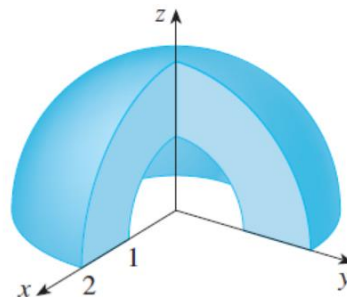
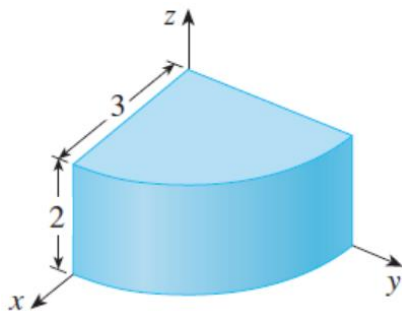
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

(9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטטו את D , החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z = 3$

ב. $z = 4x^2 + 4y^2$

ג. $x^2 + y^2 = 4$

- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

ב. $2x + 3y + 4z = 1$

ג. $x^2 = 16 - z^2$

ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r = 3$

ב. $z = r^2$

ג. $z = r$

ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$

ה. $r = 4 \sin \theta$

ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

- (4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

- (5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- (6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- (7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- (8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

תשובות סופיות

1 א. מערכת גלילית: $z = 3$. מערכת כדורית: $r = \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2$. מערכת כדורית: $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2$. מערכת כדורית: $r = \frac{2}{\sin \phi}$. שם המשטח: גליל.

2 א. מערכת גלילית: $r^2 + z^2 = 9$. מערכת כדורית: $r = 3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. מערכת כדורית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z = r$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y = x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5 א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

6 א. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$(7) \quad \text{א. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\}$$

$$(8) \quad \text{א. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

$$\text{ג. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

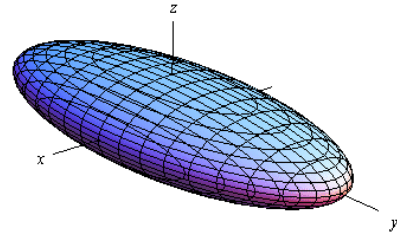
$$\text{ד. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\}$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

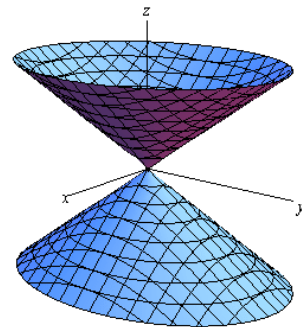
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

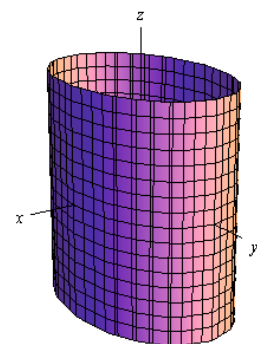
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

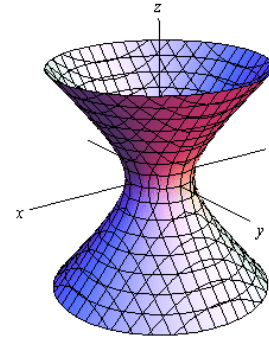


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

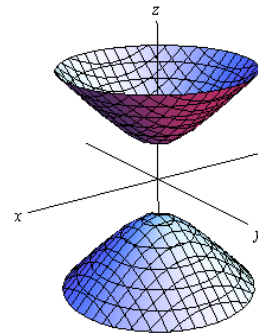
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

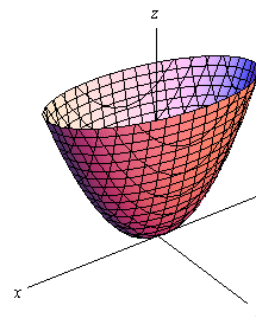
פרבולואיד אליפטי

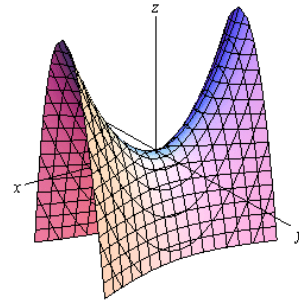
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



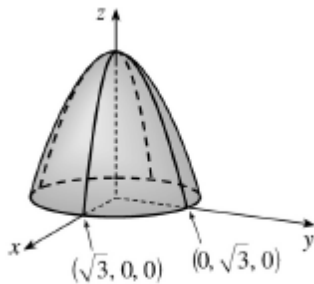
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

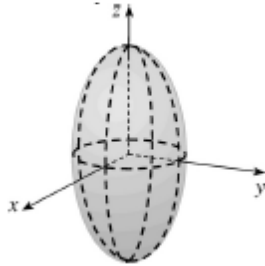
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

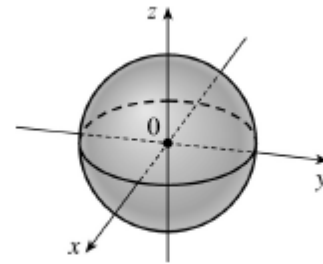
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

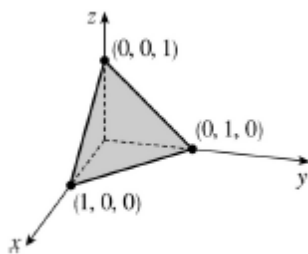
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



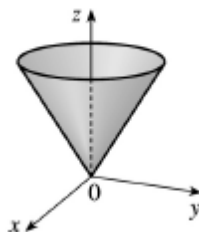
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



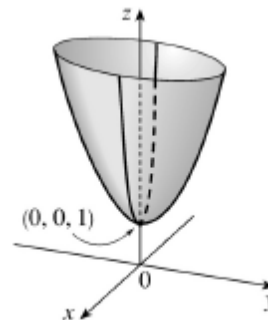
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 3 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 39
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 41
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 43
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 44

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2\ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף? ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
 ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
 - א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 - ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

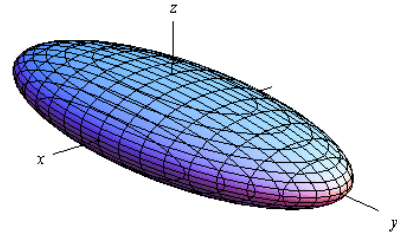
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

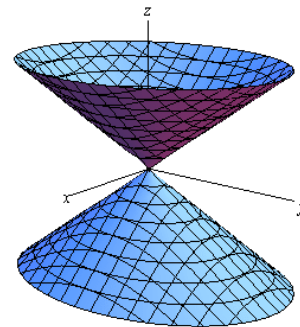
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

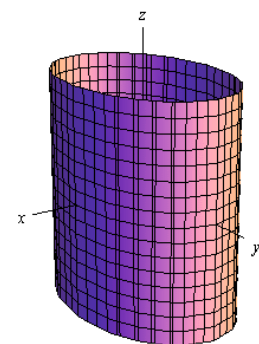
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

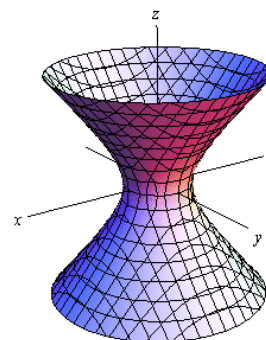
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

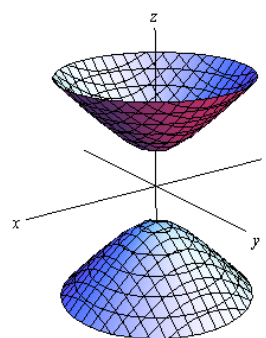


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

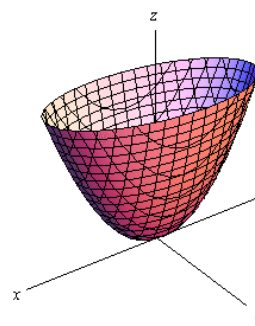
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

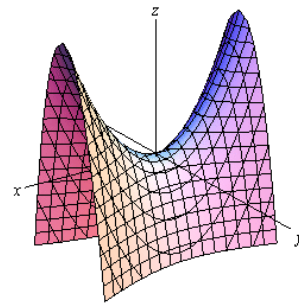
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

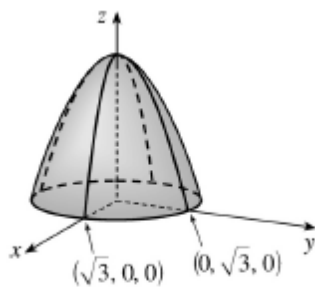
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

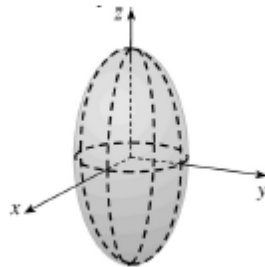
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

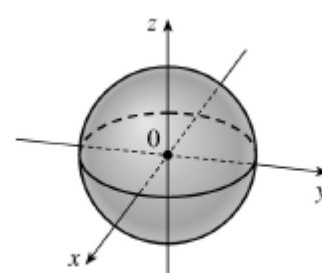
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

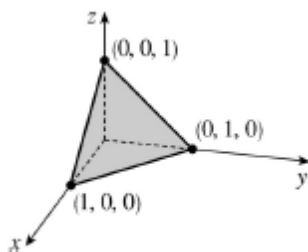
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



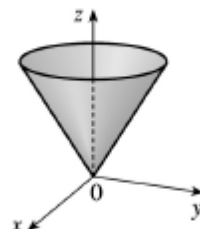
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



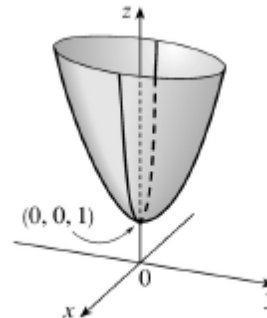
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 4 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

- 1. גבול של פונקציה של שני משתנים 47
- 2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 50
- 3. נוסחאות – גבולות 53

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin\left(x(y^2 + z^2)\right)}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{1}{12}$

(3) 1

(4) 0

(5) אינסוף.

(6) $\frac{1}{2}$

(7) 2

(8) 5

(9) 0

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

(18) 0

(19) 0

(20) 0

(21) 0

(22) 3

(23) 0

(24) 0

(25) 0

(26) א-ד. 0

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר m קבוע.

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y) \quad \text{לכל } y$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0) \quad \text{לכל } x$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$$

9) פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$, לכל (x, y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) , כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$	$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 5 - מבוא לטופולוגיה

תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה 54

מבוא לטופולוגיה

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2)$.

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- האם הקבוצה חסומה?
- האם הקבוצה קשירה?
- רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- האם הקבוצה פתוחה?
- מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
- אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- הערה: נקודת שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.
- האם הקבוצה סגורה?
- האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- האם הפונקציה רציפה ב- D ?

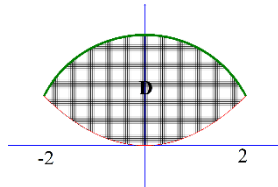
(2) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- האם הקבוצה חסומה?
- האם הקבוצה קשירה?
- רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- האם הקבוצה פתוחה?
- מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
- אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- האם הקבוצה סגורה?
- האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- האם הפונקציה רציפה ב- D ?

(3) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- ג. האם הקבוצה חסומה?
- ד. האם הקבוצה קשירה?
- ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- ו. האם הקבוצה פתוחה?
- ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- ח. האם הקבוצה סגורה?
- ט. האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

תשובות סופיות



א. $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5, y > \frac{1}{4}x^2 \right\}$.ב.

ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}$

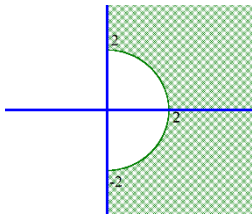
ו. הקבוצה אינה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid 4y = x^2, -2 < x < 2\}}_E$

(0, $\sqrt{5}$) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (0, 0) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0\}$.ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}$

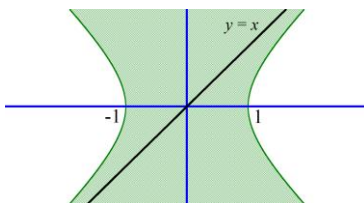
ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid x = 0, |y| > 2\}}_E$

(2, 0) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (0, 3) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. $D = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x\}$.ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D פנימיות למעט הנקודות: $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ or } y = x\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid y = x\}}_E$

(0, 0) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (-1, 0) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה $f(x, y)$ לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 6 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

57	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון.....
59	2. נגזרות חלקיות מסדר שני.....
63	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה.....
65	4. דיפרנציאביליות.....

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתון } z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$(12) \text{ נתון } f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f &= f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18) נתון $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$.

חשבו $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$.

הערת סימון

$$\begin{array}{lcl}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$\begin{aligned}
 f_y &= -2x^2y + 10 & f_{xx} &= 8 - 2y^2 & f_x &= 8x - 2xy^2 + 4 & (1) \\
 f_{yx} &= -4xy & f_{xy} &= -4xy & f_{yy} &= -2x^2 \\
 f_y &= \frac{x^4}{y} & f_{xx} &= 12x^2 \ln y & f_x &= 4x^3 \ln y & (2) \\
 f_{yx} &= \frac{4x^3}{y} & f_{xy} &= \frac{4x^3}{y} & f_{yy} &= -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y &= 3y^2 - 6x & f_{xx} &= 6x & f_x &= 3x^2 - 6y & (3) \\
 f_{yx} &= -6 & f_{xy} &= 6 & f_{yy} &= 6y \\
 f_y &= 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} &= 6x & f_x &= 3x^2 + 3 - 3y & (4) \\
 & & f_{xy} &= -3 & f_{yy} &= 6y - 6 \\
 f_y &= x^2 - 2xy & f_{xx} &= 2y & f_x &= 2xy - y^2 & (5) \\
 & & f_{xy} &= f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} &= -2x \\
 & & f_x &= 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & & f_y &= 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & & f_{yy} &= 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} &= 2[8y - 0 - 24] \\
 & & & & f_{xy} &= 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 f_y &= e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x &= e^{xy}(xy + y^2 + 1) & (7) \\
 f_{yy} &= e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} &= e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & & f_{xy} &= e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & & , f_{xx} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & & f_{yy} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & & f_{xy} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y &= e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x &= e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & & f_{xx} &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & & f_{yy} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & & f_{xy} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{aligned}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \quad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \quad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (18)$$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשבו אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{xyxyyx}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

(1) א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(2) $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

(3) $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

(5) א. $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
ב. לא רציפות.

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(6) א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, f(x, y) \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון} \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות} \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המוגדרת על ידי} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 7 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....68

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
חשבו: z_u , z_v

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
חשבו: z_t , z_m , z_k

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
הוכיחו: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון: $z = f(xy)$
הוכיחו: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
הוכיחו: $z_x + z_y = 0$

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
הוכיחו: $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון: $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
הוכיחו: $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

(9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

(10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

(11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

(12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

(13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1, \pi)$, אם ידוע ש- $g'(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

(14) נתון: $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $u = f(x, y)$

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

15 נתון $z = h(u, v)$, ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. הוכיחו כי:

א. u, v מקיימות את משוואת לפלס.
 כלומר, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ וכן $v_{xx} + v_{yy} = 0$.
 ב.
$$h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

16 נתון: $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$. הוכיחו כי:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

17 פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$. הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$
 ב. $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$

18 נתונה הפונקציה

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. נתון $x = 2t, y = t$. חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.
 ג. נתון $x = 2t, y = t$. חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.
 ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 8 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 72

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

(9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

(11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

(12) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשבו את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z).$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2.$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4.$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y) \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

(18) נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

(19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?

מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

(20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

(1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ או $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$$

(2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

(3) וקטור יחידה יסומן $\hat{u}$.

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$. ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$. ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2 / \sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 9 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות - הפן הטכני 77
2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי 80
3. שימושים גיאומטריים 87

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ חשבו את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$ הוכיחו כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$ מצאו $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
 - א. $z_{xx}(2,1)$
 - ב. $z_{xy}(2,1)$
 - ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכיחו כי:

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2 \quad \text{א.}$$

$$z_{xy} = z_{yx} \quad \text{ב.}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (6)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א.} \quad (9)$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה.}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \text{ א.} \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \text{ ב.}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

(2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה

$x = 4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x, y)$ מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס.

בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

- (5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשבו את y' עבור נקודות אלה.
 - מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- (6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשבו את y'' עבור נקודות אלה.
- (7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשו זאת בשתי דרכים:
- על ידי תיאור גרפי של העקום.
 - על ידי חישוב.
- (8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.
- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x .

(9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- ה. ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

(10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$.

- א. בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- ב. כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- ג. האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- ד. מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- ה. חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- ו. השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- ז. חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

(11) נתונה המשוואה $y^3 + 6x \sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0, -2)$.

- א. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.
- ב. פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

(12) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.
- ב. נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y , $x = g(y)$.
- ג. חשבו את $g'(1)$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x, z)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1, 2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 2, 0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$.

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x, z)$,

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x, y)$,

בנקודה $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$, שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x, y)$?

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור $w = w(x, y)$.

(18) נתונה מערכת המשוואות :

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- (2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.
- (3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.
- (4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1,140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה $(2,1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- (5) א. כל נקודה (x,y) שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(2,2)$.
- (6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(0,0)$, $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$.
 ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ ג. כלום! ד. לא.
- (7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R,0)$, $(-R,0)$.
 ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- (8) א. $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = 3$. ב. כן, $(0,0)$, $(-0.5, -0.5)$. ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- (9) א. כל נקודה (x,y) שעל $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
 ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד. לא קיימת.
- (10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1,1)$.
 ה. $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $(x > 0, y > 0, (x,y) \neq (1,1))$ ז. שאלת הוכחה. ח. לא ניתן.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$.
- (12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1) = -2$.
- (13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- (15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- (16) הנקודה היא $(0,0,0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$.

ב. לא מתקיימים.

$$(17) \quad \frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \text{א.}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} \quad \text{ד.}$$

$$\text{ג. } w_x(2,2) = -3, \quad w_y(2,2) = 3$$

$$\text{ב. } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(18) \quad \text{א. } \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$$

שימושים גאומטריים

שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x = -2$, $y = 1$?
- (2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$,
המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.
- (4) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C, בהתאמה.
נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
הוכיחו $OA + OB + OC = a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$.
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.
- (6) הראו שהמשטח $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.
- (7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$,
בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואות העקום.

הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$.

(9) נתונות שתי עקומות

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,

כאשר $(a, b, c) = \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, על ידי $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לוקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (6)$$

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{א.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$\text{א. נקבל שנקודת החיתוך היא } P(1, -1, 0) \quad \text{ב. לא.} \quad (10)$$

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad \text{כל נקודה, למעט } (0, 0, 0). \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,} \quad (14)$$

$$\text{שנוסחתו: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 10 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים והדיפרנציאל השלם

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים.....91
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי.....93

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את } \ln(1.5).$$

$$(6) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את } e^3.$$

$$(7) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את } \sqrt[3]{2}.$$

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

- (1) חשבו בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- (3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10 \text{ cm}$, $b = 24 \text{ cm}$. חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב-4mm ואת הצלע b יקצרו ב-1mm.
- (5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

- (1) $\cong -0.01$
- (2) $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 11 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 94

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- 12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- 13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
- א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.
- ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- 14) מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- 1) $(-0.5, 1)$ אוכל; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכל.
- 3) $(0, 0)$ אוכל; $(1, 1)$ מינימום.
- 4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכל.
- 5) $(0, 2)$ מקסימום.
- 6) $(4, 4)$ מקסימום.
- 7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8) אין נקודות קריטיות.
- 9) $z = 4$, $z = 3$
- 10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- 12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי \$288.
- 13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכל; $-2 < a < 2$ מינימום.
- 14) $a = -6$, $b = 4$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 12 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים
הפחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים 96

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5 :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
 * לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$(7) \quad h(x) = ax + b, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5).$$

$$(8) \quad h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2).$$

$$(9) \quad h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4).$$

$$(10) \quad h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90).$$

$$(11) \quad h(x) = ax^2 + bx + c, \text{ הדגימו עבור } (1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12).$$

$$(12) \quad \text{נתונות } n \text{ נקודות: } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$,

$$\text{נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים} \quad f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad (t, t) \text{ לכל } t \text{ ממשי, מקסימום.}$$

$$(2) \quad (0, 0) \text{ מקסימום.}$$

$$(3) \quad \text{אין קיצון. } (1, 2) \text{ אוקף.}$$

$$(4) \quad \text{אין קיצון. } (1, 2) \text{ אוקף.}$$

$$(5) \quad (0.5, 1, 1) \text{ מינימום.}$$

$$(6) \quad 0.375$$

$$(7) \quad y = 0.88x + 0.3$$

$$(8) \quad y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$(9) \quad y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$$

$$(10) \quad y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$$

$$(11) \quad y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$$

$$(12) \quad a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 13 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ.....98

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
 נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$.
 תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
 הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$(14) \text{ שאלת הוכחה.}$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 14 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 101

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצאו על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 - ב. מצאו נקודה על המישור $-2x - 2y + z = 0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 - ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$, הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
 ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 15 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 103

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה**שאלות**

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 16 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

104	1. אינטגרלים כפולים
107	2. החלפת סדר אינטגרציה

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x,y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2, 2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad \frac{1}{40}$$

$$(3) \quad \frac{a^3}{3}\pi$$

$$(4) \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(5) \quad \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$

$$(6) \quad \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$

$$(7) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(8) \quad \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(9) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$(10) \quad \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(11) \quad \frac{32}{21}$$

$$(12) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$(13) \quad \frac{a^4}{2}$$

$$(14) \quad 14a^4$$

$$(15) \quad 0$$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז : שנו את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

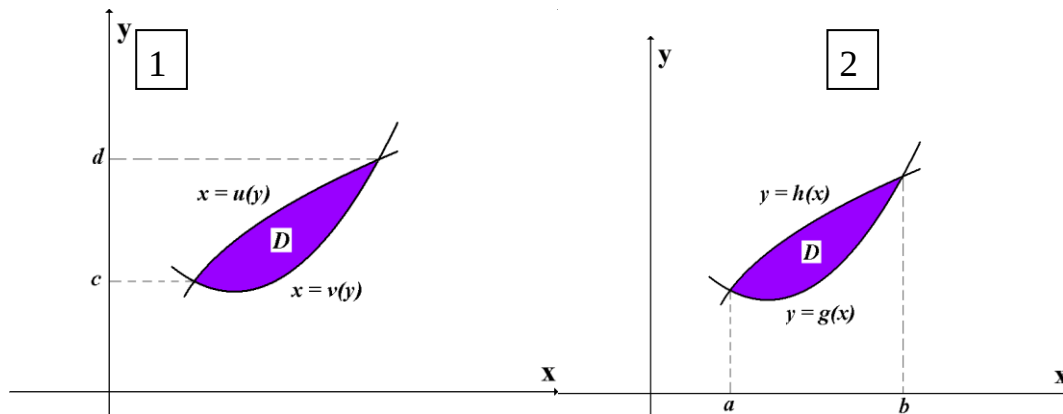
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dx dy$ ו- $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 17 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול.....110

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשבו את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

11 ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$,

יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y) = xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12 ללוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x,y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13 מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{64}{3}$

(2) $a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right)$

(3) 32

(4) $\frac{64}{3}$

(5) $\frac{5}{6}$

(6) $\frac{88}{105}$

(7) $\frac{17}{6}$

(8) $16\frac{1}{5}$

(9) $\frac{8}{3}$

(10) 36

(11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$

(12) $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

(13) $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 18 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 113
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 115

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

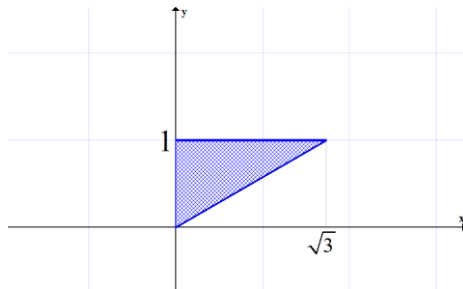
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$.

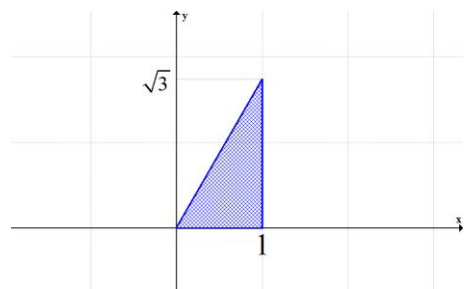
5 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$.

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \\ \text{or} & & & & & \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \end{array} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \\ \text{ב.} & 0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \end{array} \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \text{ב.} & 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (6)$$

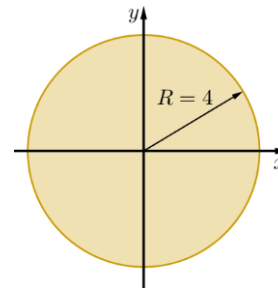
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

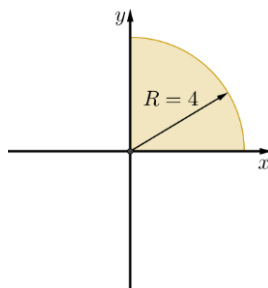
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

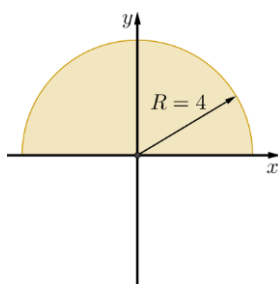
א.



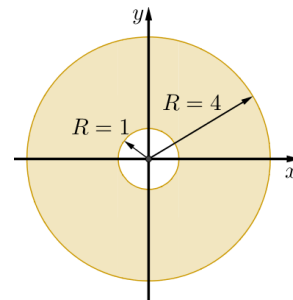
ב.



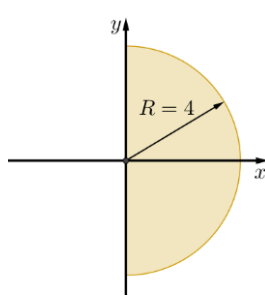
ג.



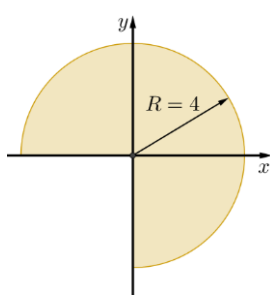
ד.



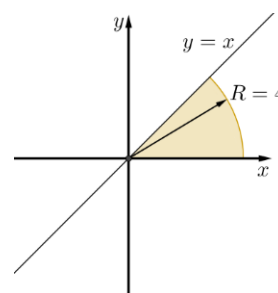
ה.



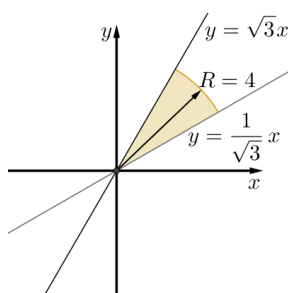
ו.



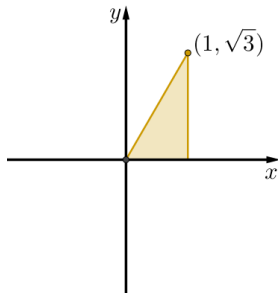
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (3) π (4) $\frac{\pi}{8}$ (5) $\frac{\pi}{2}$
- (6) πa^2 (7) 2π (8) 36 (9) $\frac{4}{3}$
- (10) $\pi \ln \frac{e}{2}$ (11) $\pi(4-\pi)$ (12) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ (13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (14) $\frac{\pi}{2} + 1$ (15) $-\frac{4}{5}$ (16) $\pi \ln \frac{4}{e}$ (17) π
- (18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) $\frac{32}{9}$
- (20) $\frac{5\pi}{32}$
- (21) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 19 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול.....118

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 20 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 120
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 122
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 123
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 125
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 127

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln \left(\frac{m+1}{n+1} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, עבור $b > a > 0$.

(2) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx$, עבור $b, a > 1$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2)$ לכל a ו- b .

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

(4) בהינתן הנוסחה $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$.

תשובות סופיות

(1) $\ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$

(2) $\pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי תלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך. בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל. בררו עם מתרגלות וואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

שאלות

(1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(kx) dx$, כאשר k ממשי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0 < a \leq \alpha$.

(2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx$, כאשר n טבעי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

(3) הוכיחו שהאינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 0$.

(4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

(5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ עבור $\alpha \geq k > 0$.

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$ המקיים.

$$(6) \quad \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx \quad \text{נתון האינטגרל}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n \in \mathbb{N}$

ב. $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$, $(\alpha > 0)$

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א. $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(2) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(3) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

(4) הוכיחו כי עבור $b > a > 0$ ו- $r \in \mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

(5) הוכיחו:

א. $(\alpha, r > 0) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$

ב. $(\alpha, r > 0) \quad \int_0^{\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{a}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$

ג. $(\alpha > 0) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$

(6) הוכיחו:

א. $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

(8) חשבו את $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln \frac{b}{a}$

(2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3) π

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

(8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 21 - סדרות

תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות	(ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות	129
3. חישוב גבול לפי אוילר	131
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ	132
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש	135
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית	136
7. חישוב גבול לפי ההגדרה	138
8. שלילת הגדרת הגבול של סדרה	140
9. הגדרת הגבול לפי היינה	143
10. תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס	145
11. משפט שטולץ	150
12. מבחן קושי להתכנסות סדרות	152
13. שאלות הוכח או הפרך	154

חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^2 + 10n}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n}$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right)$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}}$
- (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}}$
- (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}}$
- (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}}$
- (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}}$
- (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right)$
- (13) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}}$
- (14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$
- (15) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$
- (16) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n)$
- (17) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
- (18) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)$
- (19) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn})$
- (20) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \left(\frac{4}{n} \right)$
- (21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1}$
- (22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1}$
- (23) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n}$
- (24) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

* רמז לשאלה 24: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n – המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

תשובות סופיות

- | | |
|--|-----------------------|
| 4 (2 | 0 (1 |
| 0 (4 | ∞ (3 |
| 1 (6 | -5 (5 |
| $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (8 | 1.5 (7 |
| 4 (10 | 0.25 (9 |
| $\ln 3$ (12 | 2 (11 |
| | $e^{\frac{1}{3}}$ (13 |
| (14 $(\lim a_n = \infty) \Leftarrow (a > 0, b = 0)$, $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftarrow (b \neq 0)$ | |
| $(\lim a_n = -\infty) \Leftarrow (a < 0, b = 0)$ | |
| $\frac{k}{2}$ (16 | 2.5 (15 |
| 0.5 (18 | 0.5 (17 |
| 4 (20 | $\frac{a-b}{2}$ (19 |
| $\frac{1}{3}$ (22 | 0.5 (21 |
| 1 (24 | ∞ (23 |

חישוב גבול לפי אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$e^{0.5} \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-12} \quad (6)$$

$$e^{30} \quad (7)$$

$$e \quad (8)$$

חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (10)$$

רמז לשאלה 9: הוכיחו כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

11) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל-0.

$$א. a_n = \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{5}} \right) \dots \left(\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2n+1}} \right)$$

$$ב. a_n = n^\alpha - (n+1)^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

12) יהי x מספר ממשי וחיובי.

$$נתבונן בסדרה: $a_n = \frac{6n + \sqrt{\lfloor x^2 n^2 \rfloor}}{3n + \sqrt{2}}$$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 2$.

$$13) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^{3n^2-4} + 3^{2n^2+1} + 4^{1.5n^2+5} + 10^n}$$$

$$14) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3\sqrt{k}}}$$$

(15) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+3}^{2n+4} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k\sqrt{n}}}$

(16) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2n^2 + 3n + 5}{\sqrt[3]{5n^{12} + 2k^5 + k^3 + 1}}$

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \sqrt{k} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

(18) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

האם ניתן לפתור ישירות בעזרת מבחן המנה?

תשובות סופיות

- (1) 4
 (2) 0
 (3) 0
 (4) 0.75
 (5) 3
 (6) $\frac{3}{4}$
 (7) 0
 (8) 16
 (9) 0
 (10) 1
 (11) שאלת הוכחה.
 (12) שאלת הוכחה.
 (13) 9
 (14) 1
 (15) $\frac{1}{2}$
 (16) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$
 (17) 1
 (18) שאלת הוכחה.

חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4e} \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\infty \quad (5)$$

חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

שאלות

בשאלות 1-3 נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2 \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{יהיו } a > 0 \text{ ו- } x_1 > 0.$$

נגדיר סדרה ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, לכל n .
הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

$$(5) \quad \text{יהי } x_1 = a \geq 0.$$

נגדיר סדרה x_n ברקורסיה על ידי $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^2 + 6)$, לכל n .
א. מצאו את כל הערכים של הקבוע a , עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה x_n מתכנסת עבור $3 < a < 3.5$.

$$(6) \quad \text{יהיו } 0 < b_1 < a_1$$

$$\text{נגדיר } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad \text{לכל } n.$$

הוכיחו שהסדרות a_n ו- b_n מתכנסות ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(7) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

הניחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים. בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

תשובות סופיות

(1) הגבול הוא 2.

(2) הגבול הוא 1.

(3) הגבול הוא 1.

(4) הגבול הוא $\sqrt{a}$.

(5) א. אם $2 \leq a \leq 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה. ב. לא מתכנסת.

(6) שאלת הוכחה.

(7) ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$.

חישוב גבול לפי ההגדרה

שאלות

בשאלות 1-7 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad (2) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad (4) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad (6) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad (7)$$

(8) נתון כי הסדרה (a_n) מתכנסת.
הוכיחו שגבולה הוא יחיד.

(9) נתון כי $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

הוכיחו לפי ההגדרה, כי :

$$(a_n + b_n) \rightarrow a + b \quad \text{א.}$$

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow a \cdot b \quad \text{ב.}$$

בשאלות 10-14 הוכיחו על סמך ההגדרה של גבול של סדרה כי :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad (11) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad (13) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad (14)$$

(15) הוכיחו שהסדרה $1, 101, 2, 102, 3, 103, 4, 104, \dots$ שואפת לאינסוף.

(16) הוכיחו שהסדרה $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ שואפת לאינסוף.

(17) הוכיחו שהסדרה $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ לא שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף.

(18) הוכיחו או הפריכו:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שלילת הגדרת הגבול של סדרה

שאלות

- (1) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots$

ב. $1, 4, 10, 1, 4, 10, 1, 4, 10, \dots$

ג. $1, 0, -4, 1, 0, 4, 1, 0, -4, 1, 0, 4, \dots$

- (2) מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות, וכתבו את האיבר הכללי של הסדרה בהתאם לגבולות החלקיים שמצאתם.

א. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

ב. $\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{7}{8}, \frac{15}{9}, \frac{9}{10}, \dots$

ג. $a_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1}$

בשאלות 3-6 הוכיחו לפי ההגדרה כי:

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+10}{4n+2} \neq \frac{1}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 1}{2n^2 + 2} \neq 1$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n^2 + n + 2} \neq \frac{9}{4}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \neq 1$

- (7) בסעיפים א-ב הוכיחו לפי ההגדרה כי:

א. לסדרה $a_n = (-1)^n$ לא קיים גבול.

ב. 1 הוא לא הגבול של הסדרה $a_n = (-1)^n$.

ג. היעזר בתוצאת סעיף א' והוכיחו שלסדרה $b_n = (-1)^n \frac{3n+4}{n-5}$ לא קיים גבול.

(8) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ מתבדרת.

(9) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots$ מתבדרת.

(10) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ לא קיים גבול.

(11) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2} \right]$ מתבדרת.

(12) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{n}{10} - \left[\frac{n}{10} \right]$ מתבדרת.

(13) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+1} & n \text{ even} \\ \frac{2n+1}{n+2} & n \text{ odd} \end{cases}$ מתבדרת.

(14) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \dots$ מתבדרת.

(15) הוכיחו לפי ההגדרה, שלסדרה $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ אין גבול.

(16) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ מתבדרת.

הדרכה: הוכיחו קודם את סדרת הטענות הבאה:

$$1. \quad \sqrt{m^2} - [\sqrt{m^2}] = 0 \text{ לכל } m \text{ טבעי.}$$

$$2. \quad \sqrt{m^2 - 1} > m - \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$3. \quad [\sqrt{m^2 - 1}] = m - 1 \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$4. \quad \sqrt{m^2 - 1} - [\sqrt{m^2 - 1}] \geq \frac{1}{2} \text{ לכל } m \geq 2 \text{ טבעי.}$$

(17) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 10}$ לא שואפת ל- ∞ .

(18) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $0, 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$ לא שואפת ל- ∞ .

(19) נתונה הסדרה $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \dots$.

הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה

א. לא שואפת ל- ∞ .

ב. לא שואפת ל- $-\infty$.

(20) הוכיחו לפי ההגדרה, שהסדרה $a_n = n\sqrt{10} + (-1)^n \lceil n\sqrt{10} \rceil$ לא שואפת ל- ∞ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרת הגבול לפי היינה

שאלות

(1) הוכיחו כי :

- א. $\sin(2n\pi) = 0$ ב. $\cos(2n\pi) = 1$
- ג. $\sin((2n+0.5)\pi) = 1$ ד. $\cos((2n+0.5)\pi) = 0$
- ה. $\sin((2n+1)\pi) = 0$ ו. $\cos((2n+1)\pi) = -1$
- ז. $\sin((2n+1.5)\pi) = -1$ ח. $\cos((2n+1.5)\pi) = 0$
- ט. $\sin(n\pi) = 0$ י. $\cos(n\pi) = (-1)^n$
- יא. $\sin((n+0.5)\pi) = (-1)^n$ יב. $\cos((n+0.5)\pi) = 0$

הוכיחו כי הגבולות בשאלות 2-9 אינם קיימים לפי היינה :

- (2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x-4|}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+4^{[10x]}}$ (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] \cdot \sin x}{x}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - [\sin x]}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(4 + [\arctan x])$
- (10) נתון כי $f(x) = 2^{\left[\frac{x}{2}\right]}$

א. הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ אינו קיים לפי היינה.ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ לפי היינה.ג. תנו דוגמה לסדרה חיובית a_n , כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינו קיים אך $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ קיים.(11) הוכיחו כי הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])$ אינו קיים לפי היינה.רמז: הוכיחו ראשית כי לכל n טבעי מתקיים $[n^2 - 1] = n - 1$.

תשובות סופיות

10) ב. $\sqrt{2}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

תת-סדרה, גבול חלקי, משפט בולצאנו ויירשטראס

שאלות

- (1) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{3n} + (-3)^n + 2}$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^{5n} - 2(-3)^n + 2}{(-3)^{2n} + (-3)^n + 2}$$

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

- (2) חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים.
בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב נמקו מדוע,
וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - n \right)$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lfloor 4n \rfloor - 4 \lfloor n \rfloor)$$

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right)$$

- (3) נתון ש- (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.
א. הוכיחו שקיים איבר אי-שלילי בסדרה.

ב. הוכיחו כי $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n}$.

- (4) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

(5) חשבו את הגבול הבא
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n$$

(6) הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$.

(7) נתונה הסדרה a_n , המוגדרת על ידי $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(8) נתונה הסדרה a_n , המוגדרת על ידי $a_1 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$); $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

- (9) א. הוכיחו שכל מספר המופיע אינסוף פעמים בסדרה הינו גבול חלקי של הסדרה.
ב. מצאו סדרה שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

(10) נתונה סדרה $a_n = \sin \frac{\pi}{4} n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(11) נתונה סדרה $a_n = n \sin \frac{\pi}{4} n$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(12) נתונה סדרה $a_n = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(13) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$.

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה ובמיוחד את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(14) נתונה סדרה $a_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n^{40}} + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{4}\right)$.

מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(15) נתונה סדרה a_n , ונגדיר סדרה חדשה b_n על ידי $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$.
הוכיחו כי לשתי הסדרות אותם גבולות חלקיים.

(16) תהי a_n סדרה, ונניח כי 10 ו-11 הם שני גבולות חלקיים שלה.

הוכיחו שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיימים $m, n \in \mathbb{N}$, כך ש- $|a_m - a_n| > \frac{1}{2}$.

(17) נתונה סדרה a_n .

a_{n_k} ו- a_{m_k} שתי תת-סדרות של a_n המקיימות:

$$1. a_{n_k} \rightarrow L, a_{m_k} \rightarrow L$$

2. כל איברי הסדרה a_n מופיעים בלפחות אחת מתת הסדרות הנתונות.

הוכיחו: $a_n \rightarrow L$.

הערה: טענה זו הוסברה והודגמה בסרטון "שיטה להוכחת קיום גבול לסדרה לא מונוטונית", ובעזרתה פתרנו את שאלות 4-5.

$$(18) \text{ נתונה סדרה חיובית } a_n \text{ המקיימת } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

(19) פתרו את שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל סדרה חסומה a_n , $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

הערה: $\sup a_n$ הוא החסם העליון של הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

ב. מצאו סדרה a_n שעבורה $\inf a_n < \liminf a_n < \limsup a_n < \sup a_n$.

(20) הוכיחו שהסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב אם ורק אם $\liminf a_n = \limsup a_n$.

(21) הוכיחו את המשפט המפורסם הבא:

לכל שתי סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים

$$א. \lim(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$ב. \liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

(22) נתונות שתי סדרות חסומות a_n ו- b_n .

קבעו האם הטענה בכל סעיף נכונה, והוכיחו זאת.

א. ייתכן שמתקיים $\lim(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$.

ב. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ושתי הסדרות לעיל מתכנסות.

ג. ייתכן שמתקיים התנאי בסעיף א' ורק אחת מהסדרות לעיל מתכנסת.

(23) יהיו (a_n) ו- (b_n) סדרות חסומות.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

הוכיחו כי

(24) תהי (a_n) סדרה חסומה של מספרים חיוביים, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} a_n) = 1$.

א. הוכיחו שאם (a_n) מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

ב. הוכיחו שאם $L > 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) ,

אז גם $\frac{1}{L}$ הוא גבול חלקי שלה.

ג. הוכיחו שלא ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ד. הראו, באמצעות דוגמה, שללא דרישת החסימות,

ייתכן ש- $L = 0$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

(25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הדגימו שתי סדרות חסומות ומתבדרות, (a_n) ו- (b_n) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$$

המקיימות

ב. יהיו (a_n) ו- (b_n) שתי סדרות, המקיימות $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

הוכיחו שאם לכל n מתקיים $0 \leq a_n, b_n \leq 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

(26) תהי $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$.

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.

ג. הוכיחו כי לכל n מתקיים $\langle \sqrt{n^2 - 1} \rangle = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$.

ד. הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)) = 1$.

ה. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד', כדי להוכיח ש- $L = 1$ הוא גבול חלקי של (a_n) .

ו. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

27) תהי $(a_n) = (n - \sqrt{n} \lceil \sqrt{n} \rceil)$.

- א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה מלרע.
- ב. הוכיחו ש-0 הוא גבול חלקי של (a_n) .
- ג. מצאו את $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ואת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, וקבעו האם ל- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
- ד. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו שכמעט לכל n , מתקיים $n < \sqrt{n^2 + 2\ell} < n+1$.
- ה. יהי ℓ מספר טבעי.
הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2\ell} - n) = \ell$.
- ו. הוכיחו, בעזרת סעיף ה', שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי של (a_n) .
- ז. האם (a_n) חסומה מלעיל?
- ח. חשבו את $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- ט. מצאו את $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.

תשובות סופיות

- 1) א. הסדרה שואפת לאינסוף.
ב. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים של הסדרה הם אינסוף ומינוס אינסוף.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $\pm \frac{1}{e}$.
- 2) א. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, -1.
ב. הגבול של הסדרה הוא 0.
ג. לסדרה אין גבול. הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם 0, 0.25, 0.5, 0.75.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט שטולץ

שאלות

$$(1) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$(2) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$$

$$(3) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \text{ כאשר } p \text{ קבע שלם וחיובי.}$$

$$(4) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}, \text{ אם ידוע כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$$

$$(5) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}, \text{ כאשר } a \text{ קבוע ממשי.}$$

$$(6) \text{ נתון כי } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הוכיחו כי:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$ (סדרת הממוצעים החשבונית מתכנסת ל- L).

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = L$ (סדרת הממוצעים ההרמונית מתכנסת ל- L).

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = L$ (סדרת הממוצעים ההנדסית מתכנסת ל- L).

* הערה: בסעיף ב' הניחו כי $L \neq 0$, ובסעיף ג' הניחו כי $a_n > 0$ לכל n .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{2}{3}$

(3) $\frac{1}{p+1}$

(4) $\frac{k}{3}$

(5) $\frac{a}{3}$

(6) שאלת הוכחה.

מבחן קושי להתכנסות סדרות

שאלות

(1) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ לכל n . הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(2) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת לאינסוף.

(3) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

(4) הסדרה a_n מקיימת $|a_n - a_{n-1}| < a^n$ לכל n , כאשר $0 < a < 1$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$ מתכנסת.

(6) סדרה x_n מקיימת $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$ לכל n , כאשר $0 < k < 1$. הוכיחו שהסדרה היא סדרת קושי ולכן מתכנסת.

(7) נתונה סדרה x_n המוגדרת על ידי $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(8) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהסדרה x_n מתכנסת.

א. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

ב. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n^2}$

ג. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^2 + 8)$

(9) נגדיר סדרה x_n על ידי $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(10) סדרה x_n מקיימת $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}$ לכל n טבעי, ו- $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$.
הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל n טבעי מתקיים $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{2}$.

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. נתונה סדרה x_n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, אז x_n מתכנסת.

ב. אם לכל n מתקיים $|x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n|$, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ג. אם סדרה x_n מקיימת את תנאי קושי, אז קיים $0 < \alpha < 1$ כך שלכל n טבעי:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

הערה

בשאלות 7-10 מומלץ להשתמש בטענה אותה הוכחנו בשאלה 6.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

שאלות הוכיחו או הפריכו

הערת ניסוח

הניסוחים הבאים שקולים :

- א. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיימת הטענה X .
 ב. כמעט לכל n מתקיימת הטענה X .
 ג. לכל n , פרט למספר סופי של n -ים, מתקיימת הטענה X .

שאלות

בשאלות 1-13 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה :

- (1) אם a_n סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול, אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ וגם b_n חסומה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

(12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ וגם $a_n < 1$ לכל n , אז $k < 1$.

(13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

(14) הוכיחו או הפריכו:

א. אם כל האיברים של סדרה מתכנסת הם מספרים רציונליים, אז גם גבולה הוא מספר רציונלי.

ב. אם a_n ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ חסומה.

ג. אם a_n סדרה עולה, אז גם הסדרה $b_n = (a_n)^2$ עולה.

ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$, אז הסדרה a_n חסומה.

ה. אם a_n ו- b_n סדרות חסומות, אז גם הסדרה $c_n = \frac{1}{2^{a_n}} (b_n^2 + 2b_n)$ חסומה.

ו. אם a_n סדרה מתכנסת ו- b_n ($b_n \neq 0$) סדרה חסומה, אז לסדרה $(a_n b_n^2)$ יש תת-סדרה מתכנסת.

ז. אם a_n סדרה מתכנסת, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\left| \frac{a_n}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

ח. אם לסדרה יש גבול חלקי, אז היא חסומה.

בשאלות 15-18 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה:

(15) אם לכל n מתקיים: $a_n \in (0, 1)$, $a_{n+1} < a_n^2$, אז הסדרה a_n מתכנסת.

(16) הסדרה $a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n}{n}$ מתבדרת.

(17) אם לכל n מתקיים: $4x_n(1 - x_{n+1}) > 1$, אז הסדרה x_n מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$.

(18) לכל מספר רציונלי קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים השואפת אליו.

(19) הוכיחו או הפריכו :

א. אם הסדרה $(x_n + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

ב. אם הסדרה $(x_n^2 + \frac{1}{n} x_n)$ מתכנסת, אז הסדרה x_n מתכנסת.

(20) סדרה של מספרים שלמים המקיימת $x_{n+1} \neq x_n$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה x_n לא מקיימת את תנאי קושי.

ב. לסדרה x_n לא יכולה להיות תת-סדרה מתכנסת.

(21) הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ו- $a < b$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n < b_n$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ וכמעט לכל n מתקיים $a_n \leq b_n$, אז $a \leq b$.

(22) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \geq 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n \neq 0$.

ד. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, אז כמעט לכל n מתקיים $a_n > 0$.

(23) הוכיחו או הפריכו :

א. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n \leq k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.

ב. אם (a_n) סדרה מתכנסת ואם $a_n < k$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq k$.

(24) תהי (a_n) סדרה חיובית, המקיימת $a_{n+1} \leq \frac{a_n - a_n^2}{2}$ לכל n .

הוכיחו או הפריכו : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(25) הוכיחו או הפריכו :

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(26) נתונות שתי סדרות (a_n) ו- (b_n) , שעבורן: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $a_n \rightarrow 2$, $b_n \rightarrow 0$ או $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 2$.

ב. $a_n b_n \rightarrow 0$.

(27) נניח שסדרה a_n מקיימת $a_{2n-2} \leq a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. a_n עולה.

ב. a_n יורדת.

ג. a_n מתכנסת.

ד. a_n לא מתכנסת.

ה. לסדרה לכל היותר שני גבולות חלקיים.

כיצד תשתנה התשובה, אם נתון כי a_n מקיימת $a_{2n-2} < a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1}$ לכל n טבעי?

(28) הסדרה (a_n) מקיימת את התכונה הבאה:

$$0 \leq a_{m+n} \leq \frac{1}{2}(a_m + a_n) \text{ לכל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

(29) א. תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. תהיינה (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$.

הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(30) נתונה הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

הוכיחו או הפריכו:

הגבול של הסדרה קיים והוא קטן מ-3.

רמז: לכל $x \geq 0$ מתקיים $\ln(1+x) \leq x$.

בשאלות 31-34 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$.

31) אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

32) אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז גם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים.

33) א. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

ב. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

34) א. אם, כמעט לכל n , $b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

בשאלות 35-38 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 1$.

35) א. אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברי (b_n) חיוביים.

ב. אם (a_n) חיובית, אז קיים $N > 0$, כך ש- $b_n > \frac{1}{2a_n}$ לכל $n > N$.

36) אם (a_n) ו- (b_n) חיוביות, אז (a_n) מתכנסת או (b_n) מתכנסת.

37) א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

ג. אם (a_n) חיובית ואפסה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

38) א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$.

* הערה: בסעיף זה (ורק בו) מדובר בטענה כללית שלא קשורה לנתוני השאלה.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 1$.

בשאלות 39-42 הוכיחו או הפריכו את הטענה הנתונה,
 כאשר ידוע כי (a_n) ו- (b_n) סדרות, כך שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

(39) א. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ג. אם קיימים אינסוף ערכי n , כך ש- $a_n > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ד. קיים $N > 0$, כך שלכל $n > N$, מתקיים $b_n \neq 0$.

(40) א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ב. אם, כמעט לכל n , $0 < b_n < a_n$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

(41) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, אז קיים N טבעי, כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < \frac{1}{3}$.

(42) א. אם כמעט כל איברי (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \infty$.

ב. אם קיים קבוע $c > 0$, כך ש- $b_n \geq c$ כמעט לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(43) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ לא קיים.

(44) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$.

ג. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

ד. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לא קיים.

(45) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n - a_{n+1}| = \infty$.

ב. קיימת סדרה (a_n) כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) = \infty$.

(46) נתונה סדרה חיובית (a_n) .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

ב. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הערה : תרגיל זה מלמד שמבחן השורש "חזק" ממבחן המנה במובן הבא :
כאשר מבחן המנה עובד, אז גם מבחן השורש עובד. אך ההיפך לא נכון.

(47) נתונה סדרה חיובית (a_n) , וידוע כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים.

הוכיחו או הפריכו :

א. הסדרה (na_n) אינה חסומה.

ב. הסדרה $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה.

ג. הסדרה $\sqrt[n]{a_n}$ חסומה.

ד. הסדרה $\frac{a_n}{n}$ מתכנסת.

ה. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0$.

(48) סדרה (a_n) תיקרא יורדת אם היא מקיימת $a_{n+1} < a_n$ לכל n .
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < |a_n|$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $|a_{n+1}| < a_n$, אז היא יורדת.
- אם סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+1} < |a_n|$, אז היא יורדת.

(49) תהי (a_n) סדרה, המקיימת $a_{n+1} - a_n > -1$ ו- $|a_n| > 2$, לכל n טבעי.
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים N טבעי, כך ש- a_N חיובי, אז $a_n > 2$ לכל $n \geq N$.
- כמעט כל איברי (a_n) חיוביים או שכל איברי (a_n) שליליים.
- אם לכל n מתקיים בנוסף $a_{n+1} < \frac{a_n}{a_1}$, אז $a_1 < -1$.

(50) תהי (a_n) סדרה, כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- אם קיים קבוע $c > 0$, כך שלכל n מתקיים $|a_n| \geq c$, אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם $|a_n| > 0$ לכל n , אז מתקיים:
כמעט כל איברי a_n חיוביים או כמעט כל איברי a_n שליליים.
- אם לכל n מתקיים $|a_n| \geq n$, אז (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 22 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

162	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
165	2. מבחן ההתבדרות של טורים
166	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
168	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
170	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
171	6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123... + 0.141414...$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
 (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
 (3) מתבדר.
 (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
 (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
 (6) מתכנס ל- 8.
 (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
 (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
 (9) מתבדר.
 (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
 (11) $\frac{1}{12}$
 (12) א. מתכנס.
 ב. מתבדר.
 ג. מתבדר.
 ד. מתבדר.
 ה. מתכנס.
 ו. מתכנס.
 (13) א. מתכנס.
 ב. מתבדר.
 ג. מתבדר.
 (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
 (15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$	ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$
ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$	ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$	ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

$$(7) \quad \text{הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :}$$

$$.(\theta \neq 2\pi k) \quad \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

$$(10) \quad \text{ענו על שני הסעיפים הבאים :}$$

$$\text{א. הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$\text{ב. בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכיחו :

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n.$$

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}, a_n > 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון $p(x)$ פולינום. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט. הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים. נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 23 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

176	1. סדרות פונקציות
179	2. טורי פונקציות
181	3. טורי חזקות
183	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) $x > 0$

(2) $x \neq 5$

(3) $x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10}$

(4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5) $x > 0$

(6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

- | | |
|--|--|
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2) | $-1 \leq x < 1, R = 1$ (1) |
| $-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4) | $-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3) |
| $-1 < x < 1, R = 1$ (6) | $-3 < x \leq -1, R = 1$ (5) |
| $-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8) | $x = 1, R = 0$ (7) |
| $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10) | $-5 < x \leq 3, R = 4$ (9) |
| $-7 < x < -3, R = 2$ (12) | $-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11) |
| $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13) |
| $(x < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16) | $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15) |
| $(x < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $(x < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) |

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$ב. \text{ מהו סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)} ?$$

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

(12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

(13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (|x| < 1) \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1) \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$(5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (-5 \leq x < 5) \quad (6) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (|x| < \frac{1}{2})$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (|x| \leq 3) \quad (8) \frac{20}{27}$$

$$(9) \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (10) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \frac{1}{4} \ln 3 \quad \text{ב.}$$

$$(11) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{א.} \quad \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.}$$

$$(12) \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (13) \arctan x \quad |x| \leq 1$$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 24 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

185	1. טור טיילור וטור מקלורן
187	2. טור טיילור סביב $X=X_0$
188	3. חישוב סכום של טור
189	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
190	5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
192	6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
193	7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
199	8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$\pi/4$ (5)	$2e$ (4)	$\sqrt{e}$ (3)	e^{-2} (2)	e (1)
	$\ln \frac{3}{2}$ (9)	$\ln 2$ (8)	$\cos 1$ (7)	$\sin 1$ (6)

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(4) \quad \text{נתון כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k \text{ כאשר } k \text{ קבוע שונה מאפס. מצאו את } n \text{ ואת } k.$$

$$(5) \quad \text{חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{120}$$

$$(2) \quad \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad k=1, n=3$$

$$(5) \quad 1$$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \quad \cos 4^\circ \quad (5) \quad \ln 1.5 \quad (6) \quad (n=3) \quad (n=1) \quad (n=4)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001 ?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01 ?}$$

תשובות סופיות

(1) $\frac{53}{144}$

(2) $\frac{\pi}{60}$

(3) $\frac{47}{192}$

(4) $\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{48}$

(5) $1, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{\pi \cdot \pi}{4050}$

(6) $\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{160}$

(7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

(8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

(9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

(10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

(11) $|x| < \sqrt[3]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4} \approx 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$, עבור $|x| < 0.1$?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

(6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

(7) נתונה $f(x) = \sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0 \leq x \leq 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x \geq 0$ מתקיים $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

(8) נתונה $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3, \text{ עבור } 0.1 \leq x \leq 0.9.$$

ג. הוכיחו כי עבור $-1 < x$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$.

(9) נתונה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } |x| \leq 0.5.$$

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ עבור } 0 \leq x \leq 1.$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שעבורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.
- ה. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,ונניח ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.**13) תהי $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1) = f(1) = 0$.**כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.**14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי $|f'(x)| \leq M$ לכל $0 < x$.**הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.**15) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$,**ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.**16) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :** $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$ הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

(17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$, חישוב: $\sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.
- ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$.
- (2) א. נוסחה: $\tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1 = \frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.
- ב. שאלת הוכחה.
- (3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \cdot \sqrt{(c+4)^8}}x^3$, חישוב: $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.
- ב. שאלת הוכחה.
- (4) נוסחה: $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$, חישוב: $\sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.
- (5) $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$
- (6) א. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!}$, ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3$.
- (7) א. ב. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.
- (8) א. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.
- ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.
- (9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.
- ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.
- (10) א. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n$, ב. $\sqrt{e} = 1.6487$.
- ג. $\frac{3}{(n+1)!}$, ד. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$.

$$(11) \text{ א. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\text{ב. } \ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \text{ ד. } p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \text{ ה. שאלת הוכחה.}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

חדוא 2 הנדסת מכונות

פרק 25 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

200	1. הצגה פרמטרית של עקום.....
202	2. הנגזרת ושימושיה.....
203	3. שימושי האינטגרל המסוים.....

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה,
שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$$

הנתונה בצורה פרמטרית.

(2) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

(3) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,

ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

(1) $y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}$, $y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$

(2) א. ראו בסרטון. ב. $y' = \frac{-2}{2t+1}$. ג. $y = 2x + 3$. ד. $y = -0.5x + 3$

(3) א. ראו בסרטון. ב. $y = \pm\sqrt{3}x$. ג. אופקי- $(0, -9)$ אנכי $(2, -6), (-2, -6)$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

(1) חשבו את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $a, b > 0$.

* שימו לב שאם $a = b = r$, נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

(3) חשבו את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq \pi$, $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ לבין ציר ה- x .

(4) חשבו את השטח הכלוא בין העקום $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = 4\cos t$, $y = \sin^2 t$ לבין ציר ה- x .

(5) חשבו את אורך העקום $0 \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

(6) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$, מהנקודה $(1, 0)$ לנקודה $(-1, \pi)$.

(7) חלקיק נע לאורך מסלול, המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$.

מצאו את המרחק שהחלקיק עבר והשוו אותו לאורך העקום עצמו.

(8) חלק העקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$ שבין $t = 0$ לבין $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(9) חלק העקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ שבין $t = 0$ לבין $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

(10) חשבו את אורך העקום $-\pi \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}$.

11) חשבו את אורך העקום $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 3$.

תשובות סופיות

1) $8/3$

2) πab

3) 1.5π

4) $16/3$

5) 8

6) 4

7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

8) $4\pi r^2$

9) $6\pi/5$

10) $6\pi\sqrt{29}$

11) $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$